Disequazioni logaritmiche

1. Si risolva la seguente equazione logaritmica:

$$\log_3^2 x - 7\log_3 x + 12 > 0$$

Poniamo $\log_3 x = t$ si ha:

$t^2 - 7t + 12 > 0$ da cui ricavando le radici si ha:

$$t < 3; t > 4$$

Sostituendo al posto di t $\log_3 x$ si ha:

$$x < 3^3; x > 3^4$$

2. Si risolva la seguente equazione logaritmica:

$$\frac{\log(x-1)}{\log^2(x-1)-4} < 0$$

La condizione di esistenza di tali logaritmi è:

$$x-1>0 \rightarrow x>1$$

Essendo una fratta poniamo numeratore e denominatore maggiore di 0:

$$\left[\begin{array}{l}\log(x-1)>0\\ \log^2(x-1)-4>0\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}x-1>1\\ \log(x-1)<-2; \log(x-1)>2\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ x-1<e^{-2}; x-1>e^2\end{array}\right. \rightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\ x<e^{-2}+1; x>e^2+1\end{array}\right.$$

Rappresentiamo :

3. Si risolva la seguente equazione logaritmica:

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{2x^2-x-3}{x-1}\right) > 0$$

Condizione di esistenza del logaritmo:

$$\left(\frac{2x^2-x-3}{x-1}\right) > 0$$

che metteremo a sistema con la disequazione:

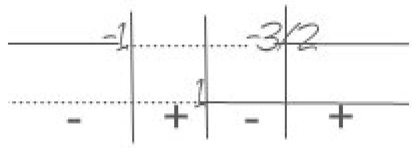
$$\begin{cases}\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)>0\\[2ex]\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)<\left(\dfrac{1}{2}\right)^0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)>0\\[2ex]\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)<1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)>0\\[2ex]\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)-1<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)>0\\[2ex]\dfrac{2x^2-x-3-x+1}{x-1}<0\end{cases}\rightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}\right)>0\\[2ex]\dfrac{2x^2-2x-2}{x-1}<0\end{cases}$$

Risolviamo la prima disequazione fratta $\dfrac{2x^2-x-3}{x-1}>0$

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-x-3>0\\ x-1>0\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}x<-1;x>\dfrac{3}{2}\\ x>1\end{array}\right.$$

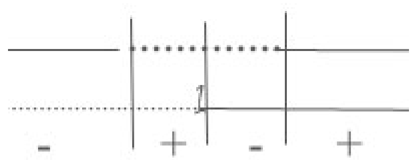
Rappresentiamo:



$$S_1:-1<x<1;x>\frac{3}{2}$$

Risolviamo la seconda disequazione fratta: $\dfrac{2x^2-2x-2}{x-1}<0$

$$\left[\begin{array}{l}2x^2-2x-2>0\\ x-1>0\end{array}\right.\rightarrow\left[\begin{array}{l}x<\dfrac{1-\sqrt{5}}{2};x>\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\\ x>1\end{array}\right.$$

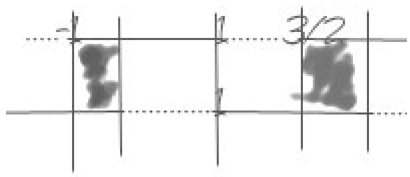


$$S_2:x<\frac{1-\sqrt{5}}{2};1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

Mettiamo a sistema le due soluzioni ottenute

$$\begin{cases} -1 < x < 1; x > \frac{3}{2} \\ x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}; 1 < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2} \end{cases}$$

Rappresentiamo il sistema:



Pertanto la soluzione è: $S: -1 < x < \frac{1-\sqrt{5}}{2}; \frac{3}{2} < x < \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

4. Si risolva la seguente equazione logaritmica:

$$\log_{\frac{1}{2}}(x - \sqrt{1-x^2}) > 0$$

Condizione di esistenza del logaritmo:

$(x - \sqrt{1-x^2}) > 0$

che metteremo a sistema con la disequazione:

$$\begin{cases} (x - \sqrt{1-x^2}) > 0 \\ \log_{\frac{1}{2}}(x - \sqrt{1-x^2}) > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (x - \sqrt{1-x^2}) > 0 \\ (x - \sqrt{1-x^2}) < 1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \sqrt{1-x^2} < x \\ \sqrt{1-x^2} > x - 1 \end{cases}$$

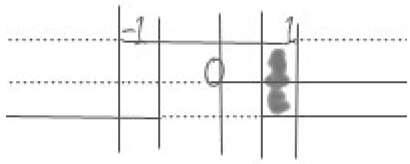
Ci troviamo davanti a due disequazioni irrazionali, risolviamole separatamente-

La prima:

$$\sqrt{1-x^2} < x$$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x > 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ 2x^2 - 1 > 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x > 0 \\ x < -\frac{\sqrt{2}}{2}; x > \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

Rappresentiamo:



$$S_1 : \frac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$$

La seconda:

$$\sqrt{1-x^2} > x-1$$

$$\begin{cases} 1-x^2 \geq 0 \\ x-1<0 \end{cases} \cup \begin{cases} x-1>0 \\ 1-x^2 > x^2-2x+1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x<1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>1 \\ 2x^2-2x<0 \end{cases};$$

$$\begin{cases} -1 \leq x \leq 1 \\ x<1 \end{cases} \cup \begin{cases} x>1 \\ 0<x<1 \end{cases}$$

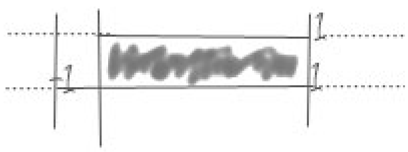
Banalmente si capisce che l'unica soluzione ci è dato dal primo sistema pertanto

$$S_2 : -1 \leq x \leq 1$$

Mettiamo le due soluzioni a sistema:

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 1 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

Rappresentiamo il sistema:



Pertanto la soluzione è: $S : \dfrac{\sqrt{2}}{2} < x < 1$